Kreis- und Kugelgleichung

Was macht die Kreis- bzw. Kugelgleichung?

Jeder Punkt X, der die Gleichung erfüllt, liegt auf der Kreislinie bzw. auf der Kugeloberfläche. Und so sieht sie aus:

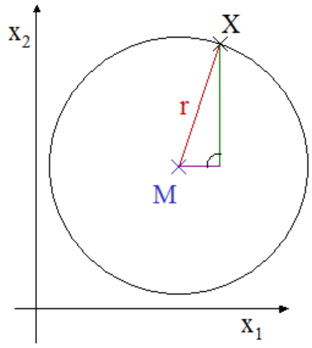
Vektorgleichung: **k: $(x - m)^2 = r^2$**

Koordinatengleichung: beim Kreis (zweidimensional) k: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

und bei der Kugel (dreidimensional): k: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

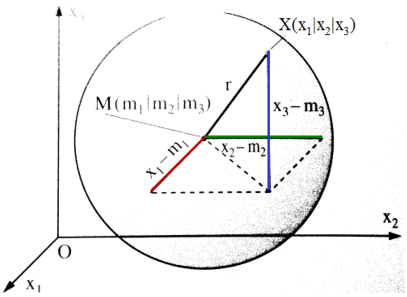
m steht für „Mittelpunkt" und r steht für Radius!

Herleitung



Kreisgleichung

$r = |MX| \rightarrow |\vec{x} - \vec{m}| = r \rightarrow (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$



Kugelgleichung

$$\mathbf{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}$$

Wiederholung der Quadratischen Ergänzung

Das haben wir: $x^2 + a = b$. Und da wollen wir hin: $(x + c)^2 = d$

$x^2 + 6x = 16$

$x^2 + 6x + (\frac{6}{2})^2 = 16 + (\frac{6}{2})^2$

$x^2 + 6x + 9 = 25$

$(x + \sqrt{9})^2 = 25$

$(x + 3)^2 = 25$

S. 183 Aufg. 2a

Untersuchen Sie, ob durch folgende Gleichung ein Kreis beschrieben wird, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Mittelpunkt und den Radius.

$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 11 = 0$

Lösung

	$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 + 11 = 0$
umstellen	$x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 + 8x_2 = -11$
quadr. Erg.	$x_1^2 + 4x_1 + (\frac{4}{2})^2 + x_2^2 + 8x_2 + (\frac{8}{2})^2 = -11 + (\frac{4}{2})^2 + (\frac{8}{2})^2$
	$x_1^2 + 4x_1 + 4 + x_2^2 + 8x_2 + 16 = 9$
bin.Formel	$(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = 9$
	→ M_1 (-2|-4) und r= $\sqrt{9}$ = 3. Es spricht nichts *gegen* eine Kreisgleichung

S. 184 Aufg. 10a

Überprüfen Sie, on die Punkte A, B und C innerhalb der Kugel, auf der Kugel oder außerhalb der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r liegen.

A(4|1|3), B(3|0|10), C(-1|1|1); M(1|1|7), r=5

Lösung

Punkt A liegt auf der Kreislinie, da ...

$(4 – 1)^2 + (1 – 1)^2 + (3 – 7)^2 = r^2$

$9 + 16 = 25$ → $r = \sqrt{25} = 5$

Punkt B liegt innerhalb des Kreises, da ...

$(3 – 1)^2 + (0 – 1)^2 + (10 – 7)^2 = r^2$

$4 + 1 + 9 = 14$ → $r = \sqrt{14} \approx 3{,}742 < 5$

Punkt C liegt außerhalb des Kreises, da ...

$(-1 – 1)^2 + (1 – 1)^2 + (1 – 7)^2 = r^2$

$4 + 36 = 40$ → $r = \sqrt{40} \approx 6{,}325 > 5$